手牵手走向明天 题解

算法一

修改和操作均对于整个序列。那么就和[Ynoi2018]天降之物一样了，直接使用该题的做法即可。由于该题正解和本题无关，这里不进行讨论。

期望得分 1 分

算法二

对于修改操作，直接从左到右扫描 $l \sim r$ 然后修改。单次复杂度 $O(n)$。

对于查询操作，枚举 x 的出现位置，再枚举 y 的出现位置即可。单次复杂度 $O(n^2)$。

时间复杂度 $O(n^2 m)$。

期望得分 5 分，结合算法一可得 6 分。

算法三

考虑优化查询操作。

我们要求的是两个位置的最小值，那么我们扫描到位置 i 时，只需要考虑 i 和离 i 最近的 x 出现的位置或者 y 出现的位置考虑贡献，再前面出现的显然不优。

那么我们从左到右扫描，并维护 x 和 y 最后一次出现的位置，同时计算答案。单次复杂度 $O(n)$。

时间复杂度 $O(nm)$。

期望得分 23 分，结合算法一可得 24 分。

算法四

观察到数列中只可能出现 1 和 2。

对于修改操作，如果 $x \neq y$，那么把 x 改成 y 相当于整个区间变成 y。

对于查询操作，如果 $x \neq y$，那么相当于查询区间中 x 和 y 是否都出现，如果都出现答案显然为 1。如果 $x = y$，那么相当于查询区间中 x 是否出现过。

由于只有两种数，我们容易通过这个区间所有数的和来判断某一个数是否在区间中出现。

区间覆盖，区间求和问题，用线段树等数据结构即可。

时间复杂度 $O(m \log n)$。

期望得分 7 分，结合算法一、三可得 31 分。

算法五

查询时保证 $x = y$。那么就是要支持区间把 x 都变成 y，区间查询某个数是否出现过。

考虑序列分块，设块大小为 S。每个块中对元素从 1 开始重新标号。可以维护二维数组 $id[k][x]$ 表示第 k 个块中 x 的标号，这样可以 $O(1)$ 获取一个数在某个块中的标号。空间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

对于查询操作，整块的部分可以直接 $O(1)$ 查询，边角的暴力即可。单次时间复杂度 $O(S+\frac{n}{S})$。

对于修改操作，边角直接暴力，整块的部分，如果 x 没有出现则忽略，如果 y 没有出现，那么可以把 y 在块中的标号对应的数更改成 x，做到 $O(1)$ 的复杂度。如果 x,y 均出现，则对这个块进行暴力修改。

这样修改的复杂度的正确性：

初始每个块中有 S 个不同标号，总共有 n 个标号。

每次修改操作，通过边角暴力最多多出 2 个标号。总共会多出 $2m$ 个标号。

每次对整块的暴力修改，复杂度为 $O(S)$，必定会减少一个标号。

总标号数最多为 $n+2m$，所以总时间复杂度为 $O(S(n+m))$。

当 $S=\sqrt{n}$ 时，各部分的复杂度均达到最优。

时间复杂度 $O((n+m)\sqrt{n})$，空间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

针对子任务 5 可能存在其他做法，这里不做讨论。

期望得分 29 分，结合算法一、三、四可得 60 分。

算法六

依然考虑序列分块，设块大小为 S。并对块内元素按算法五中的方法重标号。

考虑答案中，x 和 y 的位置关系。要么在同一个块中，要么在两个块里。

在同一个块中的情况，我们维护数组 $dis[k][x][y]$ 表示第 k 个块中，块内标号 x 的元素和块内标号 y 的元素的最短距离。那么在同一个块中的情况就可以 $O(1)$ 查询。

在两个不同块中的情况，由于我们要求距离最小，那么每个块中可能成为答案的，只有这个数第一次出现的位置和最后一次出现的位置。我们预处理每个数在每个块中的最早、最晚出现位置，然后，我们对区间中的块，用算法三的方法，扫描一遍即可。单次复杂度 $O(\frac{n}{S})$。

对于边角的情况，显然可以 $O(S)$ 完成。

上述维护的 dis 数组可以在 $O(nS)$ 的复杂度预处理，每个块内每个数最早、最晚的出现位置可以在 $O(n)$ 的复杂度预处理。dis 数组占用的空间复杂度为 $O(nS)$。

接下来考虑修改操作。

对于整块的修改，如果 x 没有出现则忽略，如果 y 没有出现则直接改标号。如果都出现过，那么其他数与 y 的距离，可能比与某个 x 的距离更近。

我们可以对于每个其他标号 id，令$dis[k][y][id]=\min(dis[k][x][id],dis[k][y][id])$，然后删掉 x 的信息。这样就在 $O(S)$ 的复杂度内完成了更新答案。

这里的总复杂度正确性证明同算法五。

对于边角的修改，发生变化的信息只跟 x 和 y 有关，我们可以使用算法三的方法，在 $O(S)$ 的时间里，重新求出块内所有数到 x 和 y 的距离的最小值。

块内每个数最早、最晚的出现位置比较好维护。

区间长度小的时候直接暴力即可。

当 $S=\sqrt{n}$ 时各部分复杂度最优，实现时需要根据常数合理调整。

总时间复杂度 $O((n+m)\sqrt{n})$，空间复杂度 $O(n\sqrt{n})$。

期望得分 100 分。